Roll No. .....

D–3560

B. Sc. (Part I) EXAMINATION, 2020

MATHEMATICS

Paper Third

(Vector Analysis and Geometry)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न के कोई **दो** भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Solve any *two* parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) सिद्ध कीजिए कि :

$$[l \quad m \quad n]\ [a \quad b \quad c] = \begin{vmatrix} l.a & l.b & l.c \\ m.a & m.b & m.c \\ n.a & n.b & n.c \end{vmatrix}$$

Prove that :

$$[l \quad m \quad n]\ [a \quad b \quad c] = \begin{vmatrix} l.a & l.b & l.c \\ m.a & m.b & m.c \\ n.a & n.b & n.c \end{vmatrix}$$

(ब) एक कण वक्र

$$x = t^3 + 1$$

$$y = t^2$$

$$z = 2t + 5$$

पर चल रहा है, जहाँ t समय है। $t = 1$ पर सदिश $i + j + 3k$ की दिशा में वेग एवं त्वरण के घटक ज्ञात कीजिए।

A particle moves along the curve :

$$x = t^3 + 1$$

$$y = t^2$$

$$z = 2t + 5$$

where t is the time. Find the component of its velocity and acceleration at $t = 1$ in the direction $i + j + 3k$.

(स) यदि :

$$\phi(x, y) = \log_e \sqrt{x^2 + y^2}$$

तो दर्शाइये कि :

$$\text{grad}\,\phi = \frac{r - (k.r)k}{\{r - (k.r)k\}\{r - (k.r)k\}}$$

If :

$$\phi(x, y) = \log_e \sqrt{x^2 + y^2}$$

then show that :

$$\text{grad}\,\phi = \frac{r - (k.r)k}{\{r - (k.r)k\}\{r - (k.r)k\}}$$

इकाई—2
(UNIT—2)

2. (अ) $\int_C F.dr$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $F = yzi + zxj + xyk$ तथा वक्र C हेलिक्स $r = a\cos t\, i + b\sin t\, j + ct\, k$ का चाप है, जिसकी सीमाएँ $t = 0$ से $t = \frac{\pi}{2}$ तक हैं।

Evaluate $\int_C F.dr$, where $F = yzi + zxj + xyk$ and C is the arc of the helix $r = a\cos t\, i + b\sin t\, j + ct\, k$ whose limits are from $t = 0$ to $t = \frac{\pi}{2}$.

(ब) गाउस के डाइवर्जेन्स प्रमेय से $\iint_S F.\, nd S$ का मूल्यांकन कीजिये, जहाँ $F = 4xi - 2y^2 j + z^2 k$ तथा क्षेत्र S, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ और $z = 3$ से परिबद्ध है।

Evaluate $\iint_S F.\, nd S$ with the help of Gauss' divergence theorem for $F = 4xi - 2y^2 j + z^2 k$ taken over the region S bounded by $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ and $z = 3$.

(स) स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए, जब $F = yi + zj + xk$ तथा पृष्ठ S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का xy-समतल के ऊपर का भाग है।

Verify Stokes' theorem when $F = yi + zj + xk$ and surface S is the part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ above the xy-plane.

इकाई—3
(UNIT—3)

3. (अ) शांकव

$$x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y = 0$$

का अनुरेखण कीजिए तथा इसकी नाभियों के निर्देशांक एवं इसकी उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

Trace the conic :

$$x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y = 0$$

find the co-ordinates of its foci and its eccentricity.

(ब) संनाभि शांकव समकोण पर प्रतिच्छेद करती है।

Confocal conics cuts at right angles.

(स) दो समान दीर्घवृत्त जिनकी उत्केन्द्रता e है, इस प्रकार रखे जाते हैं कि उनकी अक्षें समकोण पर रहें तथा उनकी एक नाभि उभयनिष्ठ है। यदि PQ एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है, तो सिद्ध कीजिए कि $PSQ, 2\sin^{-1}\left(e / \sqrt{2}\right)$ के बराबर है।

Two equal ellipses of eccentricity e, are placed with their axes at right angles and they have one focus S in common. If PQ be a common tangent, show that the angle PSQ is equal to $2\sin^{-1}\left(e/\sqrt{2}\right)$.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) यदि गोले $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ का कोई स्पर्श समतल निर्देशांकों पर अंतःखण्ड a, b, c बनाता हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{r^2}.$$

If any tangent to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ makes the intercepts a, b, c on the co-ordinates axes, prove that :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{r^2}.$$

(ब) समतल $3x + y + 5z = 0$ और शंकु $6yz - 2zx + 5xy = 0$ की प्रतिच्छेद रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

Find the angle between the lines of section of the plane $3x + y + 5z = 0$ and the cone $6yz - 2zx + 5xy = 0$.

(स) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके जनक सरल रेखा $x = \frac{-y}{2} = \frac{z}{3}$ के समान्तर हैं तथा निर्देश वक्र दीर्घवृत्त $x^2 + 2y^2 = 1,\ z = 3$ है।

Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $x = \frac{-y}{2} = \frac{z}{3}$ and the guiding curve is the ellipse $x^2 + 2y^2 = 1,\ z = 3$.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) दर्शाइये कि (x', y', z') से दीर्घवृत्तज

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

पर खींचे गये अभिलंब एक द्विघातीय शंकु पर है।

Show that the normals drawn from (x', y', z') to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ lie on a cone of second degree.

(ब) वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जबकि समतल $lx + my + nz = 1$ परवलयज $x^2 + y^2 = 2z$ का एक स्पर्श तल है।

Find the condition that the plane $lx + my + nz = 1$ may be a tangent plane to the paraboloid $x^2 + y^2 = 2z$.

(स) अतिपरवलयज $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ के बिन्दु $(2, 3, -4)$ से जाने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation to the generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ which pass through the point $(2, 3, -4)$.