Roll No. ....

D–3290

B. A. (Part III) EXAMINATION, 2020

MATHEMATICS

Paper Second

(Abstract Algebra)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई **दो** भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

1. (अ) सिद्ध कीजिए कि G के सभी आंतरिक स्वाकारिताओं का समुच्चय In (G), Aut (G) का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है तथा यह G के विभाग समूह G/Z से तुल्याकारी होता है, जहाँ Z, G का केन्द्र है।

Prove that the set In (G) of all inner automorphism of a group G is a normal subgroup of Aut (G) and is isomorphic to the quotient group G/Z of G, where Z is the centre of G.

(ब) सिलो का द्वितीय प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove second Sylow's theorem.

(स) सिद्ध कीजिए कि G प्रसामान्य उपसमूहों $N_1, N_2, ..., N_n$ का आंतरिक सरल गुणनफल है यदि और केवल यदि :

(i) $G = N_1 N_2 ...... N_n$

(ii) $N_i \cap (N_1\, N_2 ..... N_{i-1}\, N_{i+1} ..... N_n) = (e)$,

$i = 1, 2, ..., n$ के लिए

Prove that G is the internal direct product of the normal subgroups $N_1, N_2, ..., N_n$ if and only if :

(i) $G = N_1 N_2 ...... N_n$

(ii) $N_i \cap (N_1\, N_2 ..... N_{i-1}\, N_{i+1} ..... N_n) = (e)$,

for $i = 1, 2, ..., n$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) यदि f, वलय (R, +, .) से आच्छादक वलय (R′, +′, .′) पर समाकारिता है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(R/\ \mathrm{ker} f, +, .) \cong (R', +', .')$$

If f is a homomorphism from a ring (R, +, .) onto a ring (R′, +′, .′), then prove that :

$$(R/\ \mathrm{ker} f, +, .) \cong (R', +', .')$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि स्वेच्छ वलय (R, +, .) पर सभी बहुपदों का समुच्चय R [x], बहुपदों के योग और गुणन के सापेक्ष एक वलय होता है।

Prove that the set R [x] of all polynomials over an arbitrary ring (R, +, .) is a ring with respect to addition and multiplication of polynomials.

(स) यदि f एक R-मॉड्यूल M अंतर्क्षेपी एक R-मॉड्यूल N का एक समाकारिता है, तो सिद्ध कीजिए कि :

(i) $f(0) = 0$

(ii) $f(-x) = -f(x)\ \forall\ x \in M$

If f is a homomorphism of an R-module M into an R-module N, then prove that :

(i) $f(0) = 0$

(ii) $f(-x) = -f(x)\ \forall\ x \in M$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) किसी सदिश समष्टि V (F) की दो उपसमष्टियों W_1 एवं W_2 का संघ V (F) की एक उपसमष्टि होगा यदि और केवल यदि वे एक-दूसरे में अन्तर्विष्ट हों, सिद्ध कीजिए।

Prove that the union of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space V (F) is a subspace if and only if one is contained in the other.

(ब) सदिशों (1, 2, 3), (1, 0, 1) एवं (0, 1, 0) के $V_3(R)$ में रैखिकतः स्वतंत्रता या परतंत्रता की जाँच कीजिए।

Examine linearly independency or dependency of vectors (1, 2, 3), (1, 0, 1) and (0, 1, 0) in $V_3(R)$.

(स) यदि V एक परिमित विमीय सदिश समष्टि है तथा W_1 एवं W_2 दो उपसमष्टि हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2)$$

If W_1 and W_2 are two subspaces of a finite dimensional vector space V (F), then prove that :

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सिद्ध कीजिए कि समान क्षेत्र पर दो परिमित विमीय सदिश समष्टियाँ तुल्याकारी होती हैं यदि और केवल यदि उनकी विमाएँ समान हों।

Prove that two finite dimensional vector spaces over the same field are isomorphic if and only if they are of the same dimension.

(ब) यदि क्षेत्र F पर U और V दो सदिश समष्टियाँ हैं तथा यदि T, U से V में एक रैखिक रूपान्तरण है तथा U परिमित विमीय है, तो सिद्ध कीजिए कि :

जाति (T) + शून्यता (T) = विमा (U)

If U and V be vector spaces over the field F and if T be a linear transformation from U into V. If U (F) is finite dimensional, then prove that :

rank (T) + nullity (T) = dim (U)

(स) दर्शाइए कि निम्नलिखित आव्यूह A विकर्णीय है :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Show that the following matrix A is diagonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) यदि α और β किसी आंतर गुणन समष्टि V (F) के सदिश हैं, तब दर्शाइए कि :

$$\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

परिणाम की ज्यामितीय व्याख्या भी कीजिए।

If α and β are vectors in an inner product space V(F), then show that :

$$\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

Interpret the result geometrically.

(ब) यदि :

$$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_m\}$$

एक आंतर गुणन समष्टि V में सदिशों का प्रसामान्य लांबिक समुच्चय है तथा यदि β, S के रैखिक विस्तृति में हो अर्थात् $\beta \in L(S)$, तब दर्शाइए कि :

$$\beta = \sum_{k=1}^{m} (\beta, \alpha_k)\, \alpha_k$$

If :

$$S = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$$

be an orthonormal set of vectors in an inner product space V and if β is in the linear span of S, then show that :

$$\beta = \sum_{k=1}^{m} (\beta, \alpha_k)\, \alpha_k$$

(स) ग्राम-श्मिट के लांबिक प्रक्रम का प्रयोग करके $V_3(R)$ के आधार $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ से प्रसामान्य लांबिक आधार प्राप्त कीजिए, जहाँ :

$$\beta_1 = (1, 0, 0)$$

$$\beta_2 = (1, 1, 0)$$

$$\beta_3 = (1, 1, 1)$$

Using Gram-Schmidt orthogonalization process find the orthonormal basis from the basis :

$$B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

of $V_3(R)$, where :

$$\beta_1 = (1, 0, 0)$$

$$\beta_2 = (1, 1, 0)$$

$$\beta_3 = (1, 1, 1)$$